

## 正则化预条件方法在矩量法中的应用

袁浩波, 杨 蒙, 党晓杰, 王 楠

(西安电子科技大学电子工程学院, 陕西西安 710071)

**摘 要:** 计算电磁学中矩量法产生的系统矩阵是病态矩阵, 使用迭代方法求解时很难收敛, 即使采用现有的预条件技术也经常不收敛. 本文借用不适定问题求解中的正则化方法的概念, 提出采用正则化矩阵作为矩量法中矩阵方程的一个预条件矩阵. 这种预条件方法可以直接改善原矩阵的特征值分布, 而且不需要额外的空间来存储预条件矩阵. 此外, 本文提出通过正则化矩阵方程的 L 曲线的二阶导数的最大值点来确定正则化参数, 使得预条件矩阵方程求解的效率最高. 数值实验表明, 对于高阶矩量法求解电场积分方程或者磁场积分方程时分别产生的矩阵方程, 采用常见的预条件迭代方法求解时收敛很慢, 但是采用本文的预条件迭代方法却可以较快地收敛.

**关键词:** 矩量法; 病态矩阵; 迭代方法; 正则化方法

**中图分类号:** TN011      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2017)10-2549-06

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2017.10.033

### Application of the Regularization Preconditioning to the Moment Methods

YUAN Hao-bo, YANG Meng, DANG Xiao-jie, WANG Nan

(School of Electronic Engineering, Xidian University, Xi'an, Shaanxi 710071, China)

**Abstract:** The system matrices generated by the moment methods are ill-conditioned matrices, which make the iterative methods hardly converge, even accelerated by the existing preconditioning techniques. This paper applies the concept of regularization methods of ill-posed problems, and introduces the so-called regularization matrix as a preconditioner. This preconditioner can shift the eigenvalues of the system matrix directly. And it needs no additional memory to store the preconditioner. Furthermore, this paper proposes to determine the optimized regularization parameter by finding the maximum value of the second derivative of the L-curve of the regularized matrix. Numerical experiments show that the proposed method can converge relatively fast for some matrix equation generated by the electric field integral equation (EFIE) or the magnetic field integral equation (MFIE) solved with the higher order moment method, while iterative methods with the existing preconditioners may converge slowly.

**Key words:** moment methods; ill-conditioned matrix; iterative methods; regularization methods

## 1 引言

矩量法<sup>[1,2]</sup>是一种求解电磁散射和辐射问题的精确方法, 它将电磁场积分方程问题转化为一个矩阵方程进行求解, 于是矩阵方程的快速准确求解就成为矩量法的核心问题. 当矩阵规模很大时, 一般采用迭代方法求解. 但是由于矩量法中产生的矩阵是病态的, 导致各种迭代算法在求解时收敛速度都很慢甚至无法收敛. 解决的方法主要是引入预条件矩阵改善原矩阵的条件数. 当前最常见的预条件方法有稀疏近似逆预条

件(SPAI)<sup>[3]</sup>和不完全 LU 分解预条件(ILU)<sup>[4]</sup>等. 但是这些预条件方法对于矩量法中的稠密矩阵往往无能为力. 因为这些预条件方法都是根据原矩阵中的部分元素(如主对角线附近较大的元素)构造一个稀疏的预条件矩阵, 该矩阵与原矩阵的差别极大, 因而很难调整原矩阵的特征值分布, 导致预条件后得到的还是病态矩阵. 如果要较好地改善原矩阵的特征值分布, 这些方法将占用大量内存且耗费大量时间来填充预条件矩阵.

本文提出一种完全不同的预条件方法. 该方法

收稿日期: 2016-03-02; 修回日期: 2016-09-13; 责任编辑: 李勇锋

基金项目: 国家自然科学基金(No. 61072018, No. 60901030); 中国博士后基金(No. 2014M561211); 中央高校基本科研业务费专项资金(No. JB150223, No. WRYB142105)

借鉴了不适定问题中经典的正则化方法<sup>[5]</sup>的概念,将正则化矩阵作为一个预条件矩阵,在这里称之为正则化预条件方法.正则化矩阵不是一个稀疏矩阵,它本质上就是原矩阵,因此不需要额外的内存空间进行存储.正则化矩阵几乎拥有原矩阵中所有的信息,理论分析表明正则化预条件后的新矩阵的特征值分布与原矩阵相比得到了很大改善,因此正则化预条件后矩阵方程的收敛速度比常见预条件方法快得多.

## 2 正则化方法

对于对称正定矩阵  $B$  的方程

$$Bx = b \quad (1)$$

如果  $B$  有大量特征值聚集在原点附近,那么它是病态矩阵,会导致方程(1)在迭代求解时收敛很慢甚至不收敛.这属于线性不适定问题,一般采用吉洪诺夫正则化方法<sup>[5]</sup>求解.也就是在  $B$  矩阵上加入一项很小的矩阵,然后求解近似方程

$$(B + \sigma I)y = b \quad (2)$$

这里称  $\sigma$  为正则化参数( $0 < \sigma \ll 1$ ),称新矩阵  $(B + \sigma I)$  为正则化矩阵,它的特征值偏离原点并聚集在  $\sigma$  附近,所以方程(2)在迭代求解时很容易收敛.正则化方法得到的解  $y$  仅仅是原方程(1)的一个粗糙近似解.

在计算电磁学中,矩量法属于一种高精度算法.如果在矩量法中直接使用正则化方法,那么不管怎么选  $\sigma$  的值,方程(2)的解作为方程(1)的近似解时残差都可能很大.也就是说,正则化方法一般不能直接用于矩量法中,但是可以用于构造方程(1)的预条件矩阵.

## 3 正则化预条件方法

如果矩量法中产生的复数矩阵方程为

$$Ax = b \quad (3)$$

所谓正则化预条件就是用正则化矩阵的逆阵作为预条件矩阵,比如左预条件后方程(3)变为

$$(A + \sigma I)^{-1}Ax = (A + \sigma I)^{-1}b \quad (4)$$

其中  $\sigma$  是个很小的复常数( $|\sigma| \ll 1$ ).假定矩阵  $A$  的各个特征值按照模值从大到小的顺序排列分别为  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ,那么预条件后的矩阵  $(A + \sigma I)^{-1}A$  的各个特征值为

$$\theta_i = \lambda_i / (\lambda_i + \sigma), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

对于较大的特征值  $\lambda_i \gg \sigma$ ,对应预条件后矩阵的特征值为  $\theta_i \approx 1$ ;对于较小的特征值  $\lambda_i \ll \sigma$ ,对应预条件后矩阵的特征值为  $\theta_i \approx \lambda_i / \sigma$ .总之,正则化预条件不仅可以将原矩阵中较大的特征值变换到 1,而且可以将较小的特征值放大  $1/|\sigma|$  倍,所以矩阵的条件数显著降低,迭代求解时收敛很快.

## 4 预条件矩阵方程求解

求解方程(4)的算法由一个外迭代和一个内迭代构成.外迭代求解的是预条件后的矩阵方程(4),此时矩阵的特征值中仅有少数几个在原点附近,因此采用紧缩的广义最小残差法(DGMRES)<sup>[6]</sup>可以快速求解.在外迭代中每次矩阵向量乘积运算  $u = (A + \sigma I)^{-1}Ax$  包括两步运算,即原矩阵与向量  $x$  的乘积  $z = Ax$  和正则化矩阵的逆矩阵与  $z$  的乘积  $u = (A + \sigma I)^{-1}z$ .由于求得逆矩阵  $(A + \sigma I)^{-1}$  并进行存储的成本极其高昂,因此本文方法通过解方程  $(A + \sigma I)u = z$  来代替第二步的矩阵向量乘积运算.由于正则化矩阵是个良态矩阵,采用广义最小残差法(GMRES)<sup>[7]</sup>可以很快收敛,将这个求解过程称为内迭代过程.该算法总的迭代次数由内迭代的平均次数乘以外迭代次数估算出来.

在本文算法中,可以通过调节正则化参数  $\sigma$  来改变内外迭代的次数.当  $\sigma$  很大时,内迭代很快收敛,但此时正则化矩阵的预条件效果很差,导致外迭代很难收敛.反之,当  $\sigma$  很小时,内迭代很难收敛,但外迭代很快收敛.这两种情况下总的迭代次数都很多.此时,可以借用正则化方法中经典的 L 曲线法<sup>[5]</sup>得到一个折中的  $\sigma$  值,使得内外迭代的次数达到某种平衡.

所谓 L 曲线法,是指多次改变  $\sigma$  后迭代求解正则化矩阵方程  $(A + \sigma I)x = b$ ,将各次求出的结果画成一条曲线.其中曲线的横轴由解向量的范数决定 ( $-\lg \|x\|$ ),而纵轴由残差向量的范数决定 ( $-\lg \|Ax - b\|$ ).此时可以观察到一条形似 L 的曲线,该曲线的拐点处对应的  $\sigma$  值就是最佳的平衡点,确定该点的具体方法在后面计算实例中给出.得到  $\sigma$  值后代入矩阵方程(4)中即可高效率地进行迭代求解.

## 5 计算实例

下面采用五种迭代算法求解矩阵方程.第一种算法是无预条件的广义最小残差法,记为 GMRES(20)\_nopre,其中重启参数为 20.第二种算法是采用了稀疏近似逆预条件<sup>[3]</sup>的广义最小残差法,记为 GMRES(20)\_spai.第三种是无预条件的紧缩的广义最小残差法,记为 DGMRES\_nopre(10,3),其中重启参数是 10,紧缩向量有 3 个.第四种方法是采用了不完全 LU 分解预条件<sup>[4]</sup>的广义最小残差法.为了控制非零元素的填充,在该方法中采用了丢弃策略,记为 GMRES(20)\_ilu.第五种方法是本文提出的采用了正则化预条件的紧缩的广义最小残差法,记为 DGMRES(10,3)\_reg.在迭代算法得到矩阵方程的近似解后,将其代入高阶矩量法中得到双站雷达散射截面(RCS),其中 LU 分解的结果作为对比的标准.

### 5.1 导弹模型

如图 1 所示导弹模型,其纵向长约 7 米,前翼展开约 3.6 米,表面积 28.83 平方米,剖分为 180 个曲面四边形片.入射平面波波长为 1.0 米,表达式为  $E^i = x \exp(-jkz)$ .采用高阶矩量法<sup>[2]</sup>求解磁场积分方程得到其雷达散射截面(RCS),需要求解一个  $1520 \times 1520$  的复系数矩阵.该矩阵的特征值分布如图 2 所示.这些特征值基本处于右半复平面,特征值实部的最小值为  $-0.00257$ ;所有特征值的最大模值是 9.39,最小模值是 0.0279.该矩阵有大量特征值聚集在原点附近.

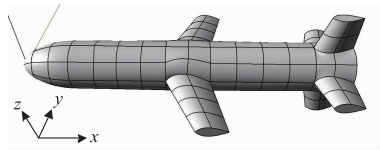


图1 导弹模型剖分为180个曲面四边形片

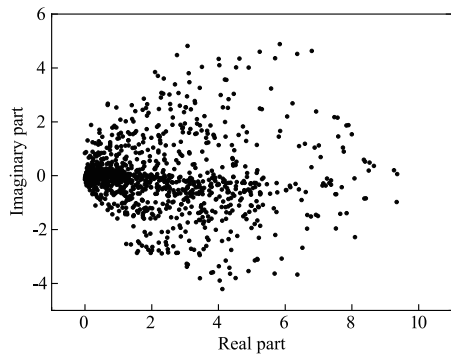


图2 高阶矩量法求解导弹模型时矩阵的特征值分布

为了得到容易求解的规则化矩阵方程  $(A + \sigma I)x = b$ ,可以尽量使规则化矩阵的所有特征值处于右半复平面,也就是取  $\sigma$  为正实数.本文在测试时选取 18 个不同的  $\sigma$  值,针对每个  $\sigma$  值分别求解规则化矩阵方程并得到  $-\lg\|x\|$  和  $-\lg\|Ax - b\|$  两个数据,这些数据的对应关系通过拉格朗日插值画成如图 3 和图 5 所示的两条曲线.图 3 给出的就是 L 曲线,其中最优点是曲线的拐点,即斜率变化最剧烈的点.现有的文献一般通过作图法找到 L 曲线的拐点的大概坐标.本文提出用 L 曲线的二阶导函数的最高点作为拐点,也就是图 4 中横坐标为 1.58 的点.图 5 是根据测试数据插值得到  $\lg\|Ax - b\|$  与  $\sigma$  的对应关系,在该曲线上找到横坐标 1.58 处对应的正则化参数是  $\sigma = 0.091$ .

预条件后的矩阵的特征值分布如图 6 所示.可见这些特征值大致呈圆形分布于右半复平面,它们不再聚集于原点,而是聚集于点 1,其最小模值为 0.237.

图 7 给出了五种迭代算法随着矩阵向量乘积次数增加时残差的收敛曲线.其中 GMRES(20)\_ilu 收敛速度最慢,在大约 40 步迭代之后陷入停滞状态.GMRES

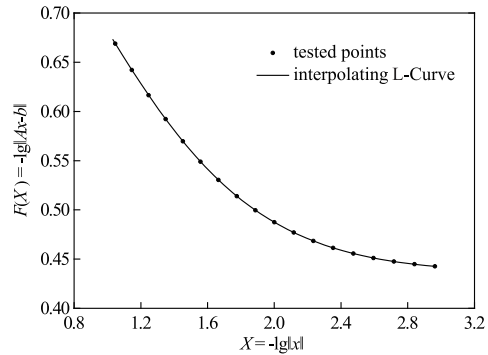


图3 导弹模型中拉格朗日插值得到的L曲线

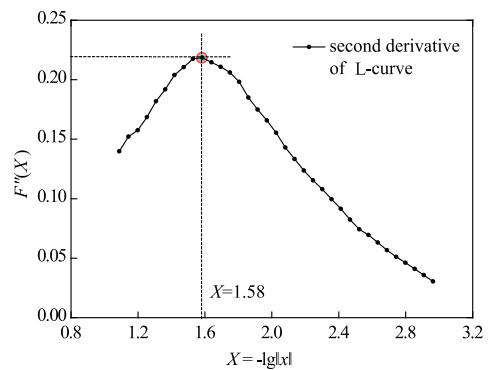


图4 导弹模型中L曲线的二阶导函数

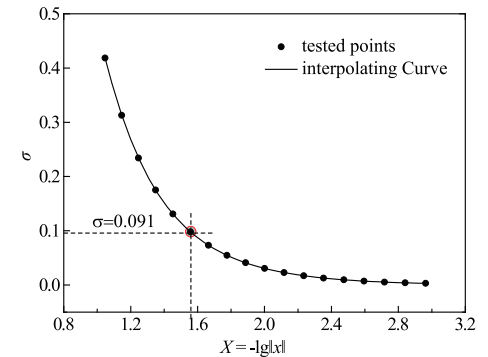


图5 导弹模型中残差范数与σ的插值曲线

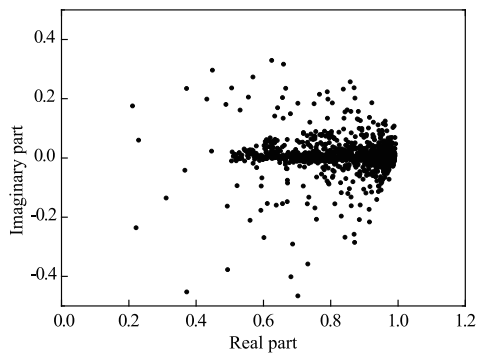


图6 导弹模型中规则化预条件后的矩阵的特征值分布

(20)\_spai 收敛速度较快,而本文的 DGMRES(10,3)\_reg 方法在迭代的最初阶段是收敛最慢的,但是在 100

步迭代之后其收敛速度反而最快。

图 8 给出了各种算法得到的 RCS. 规定五种迭代方法在进行 200 次矩阵向量乘积运算后的解代入高阶矩量法中计算 RCS. 从表 1 可见本文方法的精度最高. 表 1 还给出了三种预条件方法的填充时间和迭代时间. 其中 ILU 分解的填充速度最快. SPAI 由于要求解大量超定方程组而最慢. 本文方法中填充时间就是确定  $\sigma$  值时多次求解正则化方程所消耗的时间. 可见该方法也需要较长的填充时间.

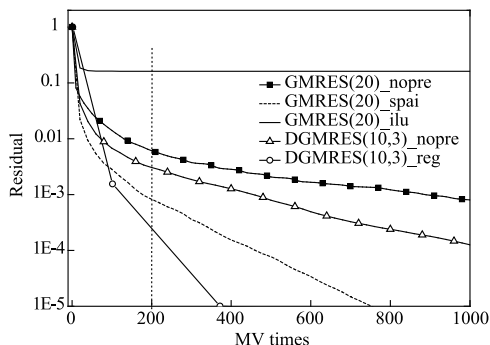


图7 导弹模型中五种迭代方法的收敛曲线

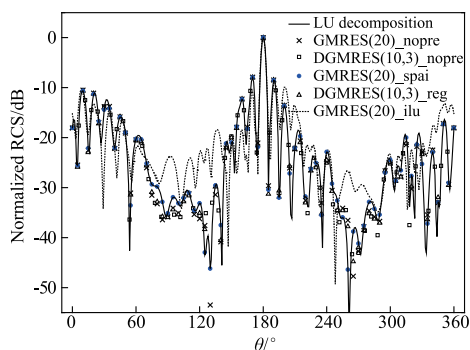


图8 导弹模型中五种迭代方法得到的 $xoz$ 面的RCS

表 1 导弹模型中三种预条件对比

	ILU	SPAI	REG
预条件占用空间/Mb	1.04	0.98	0
预条件填充的时间/s	0.4	43	31
200 步迭代的时间/s	2.01	5.17	1.79
RCS 均方根误差/dB	7.84	1.93	0.063

## 5.2 波音飞机模型

如图 9 所示的波音 737 飞机模型,长 33.4 米,宽 28.9 米,剖分为 516 个曲面四边形面片. 入射平面波波长为 3.63 米,表达式为  $E^i = \mathbf{x} \exp(-jkz)$ . 采用电场积分方程,在高阶矩量法中需要求解一个  $4128 \times 4128$  的复系数矩阵,该矩阵的特征值分布如图 10 所示. 特征值虚部的最大值为 0.02178; 所有特征值的最大模值是 8.295,最小模值是 0.0003678.

在测试  $\sigma$  时选取 14 个不同的纯虚数值,得到如图 11 的 L 曲线和图 13 所示的残差与  $\sigma$  的对应关系曲线.

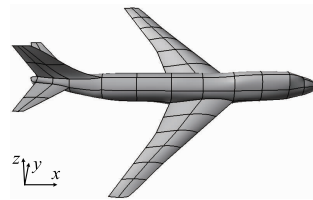


图9 波音737飞机模型

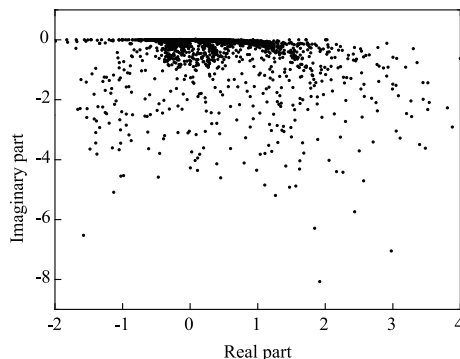


图10 高阶矩量法求解飞机模型时矩阵的特征值分布

在图 12 中找到最高点的横坐标为 5.12. 在图 13 中找到对应的正则化参数  $\sigma = -j0.055$ . 预条件后的矩阵的特征值分布如图 14 所示,大致呈圆形分布于右半复平面. 此时特征值的最小模值为 0.006681.

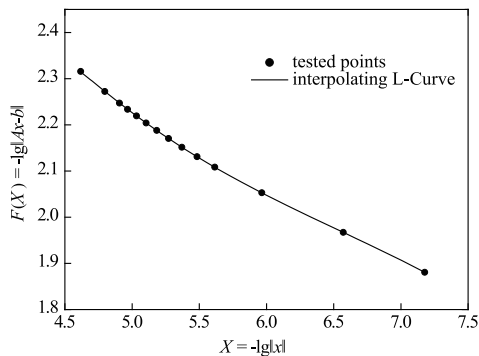


图11 飞机模型中拉格朗日插值得到的L曲线

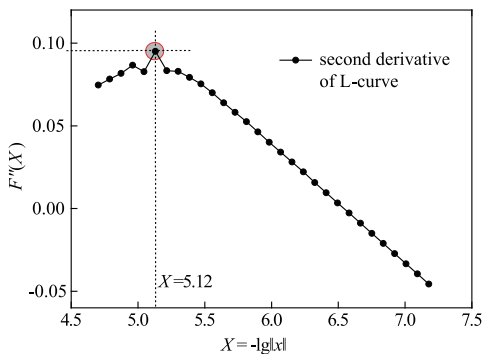


图12 飞机模型中L曲线的二阶导函数

图 15 给出了五种迭代算法的收敛曲线. 其中 GMRES(20)\_ilu 收敛速度最慢,在大约 160 步迭代之

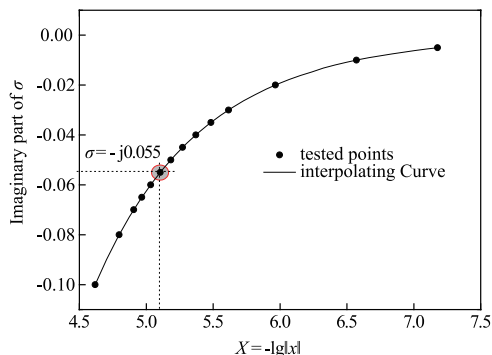


图13 飞机模型中残差范数与 $\sigma$ 的虚部的插值曲线

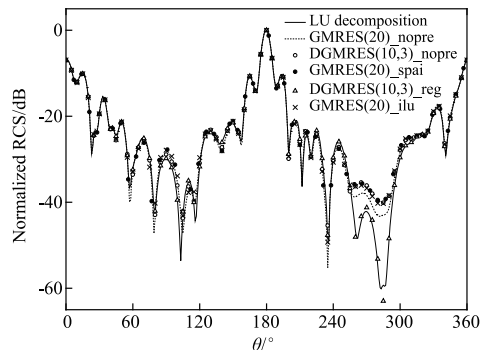


图16 飞机模型中五种迭代方法得到的 $xoz$ 面的RCS

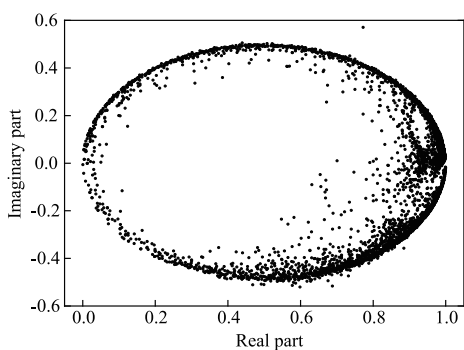


图14 飞机模型中正规化预条件后的矩阵的特征值分布

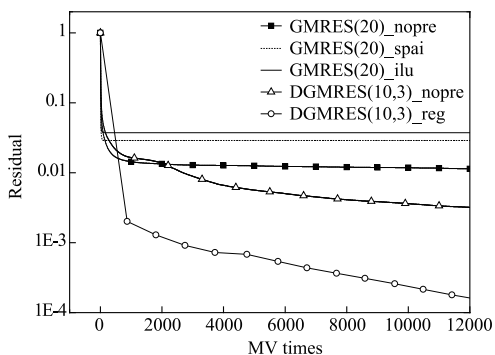


图15 飞机模型中五种迭代方法的收敛曲线

后陷入停滞状态. GMRES(20)\_spai 也在大约 120 步迭代之后陷入停滞状态. 而本文的 DGMRES(10,3)\_reg 收敛速度最快,其残差几乎呈直线下降而不会停滞.

在图 16 中,规定五种迭代方法在进行 4000 次矩阵向量乘积运算后的解代入高阶矩量法中计算 RCS. 从表 2 可见 ILU 分解的填充速度最快,而本文方法的填充时间较长. 此外,本文方法的精度远远高于 ILU 和 SPAI 两种预条件方法.

表 2 飞机模型中三种预条件对比

	ILU	SPAI	REG
预条件占用空间/Mb	42.3	33.7	0
预条件填充的时间/s	17	1273	982
4000 步迭代的时间/s	2283	1296	1864
RCS 均方根误差/dB	4.18	4.42	0.537

## 6 结论

本文提出的正则化预条件方法可以显著改善矩量法中病态矩阵的特征值分布. 该方法不需要额外空间来存储预条件矩阵,它采用内外两层迭代求解技术,能较快地收敛到精确解. 在后续工作中,如果采用快速多极子<sup>[8]</sup>或者自适应交叉近似<sup>[9]</sup>等技术压缩矩阵,结合大规模并行计算技术提高矩阵向量乘积运算的速度,并采用本文的预条件方法加快迭代算法的收敛速度,将会以较高的效率求解电大尺寸电磁问题.

## 参考文献

- [1] S Rao, D Wilton, A Glisson. Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 1982, 30(3): 409-418.
- [2] YUAN Haobo, WANG Nan, LIANG Changhong. Combining the higher order method of moments with geometric modeling by NURBS surfaces [J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2009, 57(11): 3558-3563.
- [3] L Y Kolotilina. Explicit preconditioning of systems of linear algebraic equations with dense matrices [J]. Journal of Mathematical Sciences, 1988, 43(4): 2566-2573.
- [4] A Heldring, J M Rius, L Lighthart. New block ILU preconditioner scheme for numerical analysis of very large electromagnetic problems [J]. IEEE Transactions on Magnetics, 2002, 38(2): 337-340.
- [5] D Calvettia, S Morigib, L Reichelc, F Sgallariid. Tikhonov regularization and the L-curve for large discrete ill-posed problems [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2000, 123: 423-446.
- [6] R B Morgan. GMRES with deflated restarting [J]. SIAM Journal on Scientific Computing, 2002, 24(1): 20-37.
- [7] Y Saad, M Schultz. GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems [J]. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 1986, 7: 856-869.
- [8] K C Donepudi, J M Jin, W C Chew. A higher order multi-

level fast multipole algorithm for scattering from mixed conducting/dielectric bodies[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2003, 51(10): 2814 - 2821.

[9] 袁浩波, 何力, 党晓杰, 王志军. 自适应交叉近似压缩的高阶矩量法的并行实现[J]. 电波科学学报, 2016, 31(1): 1 - 6.

#### 作者简介



**袁浩波** 男, 1980 年出生, 湖北人. 西安电子科技大学副教授, 硕士生导师, 研究方向为电磁场数值计算.

E-mail: useryuanhaobo@163.com



**杨蒙** 女, 1992 年出生, 陕西人. 西安电子科技大学硕士研究生, 研究方向为电磁场数值计.

E-mail: 326520382@qq.com